Szkolna liga zadaniowa- wrzesień/październik 2022

Zadanie 1

Wiemy, że liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równanie $a + b + c = 1$.

Wykaż, że: $ab + bc + ac \leq \frac{1}{3}$

Zadanie 2

W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle BAC = 90°$) obrano punkt D na boku BC w ten sposób, że: $\sphericalangle BDA = 2\sphericalangle BAD$

Wykaż, że: $\frac{1}{AD} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD}\right)$

Zadanie 3

Dowieść, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$$

Zadanie 4

Podaj wszystkie pary (x, y), $x, y \in Z \ \wedge \ x \neq y$ spełniające równanie:

$$x + \frac{1}{y - 2022} = y + \frac{1}{x - 2022}$$

Zadanie 5

Znajdź $a + 2b + 3c$, jeśli:

$$a + \frac{3}{b} = 3$$

$$b + \frac{2}{c} = 2$$

$$c + \frac{1}{a} = 1$$

Zadanie 6

Znajdź wszystkie $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ takie, że:

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 2\cos^2 y,$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2\sin^2 y.$$

Szkolna Liga Zadaniowa - październik/listopad 2022

Zadanie 1
Udowodnić, że dla dowolnych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$4(\sqrt{a^3b^3} + \sqrt{b^3c^3} + \sqrt{c^3a^3}) \leqslant 4c^3 + (a+b)^3.$$

Zadanie 2
Dla jakich liczb całkowitych dodatnich p liczby $p^5 + p + 1$ i $p^{11} + p + 1$ są pierwsze.

Zadanie 3
W trójkącie równoramiennym ABC ($AC = BC$) poprowadzono wysokości CK i AM. Wiedząc że $AB^2 = CK \cdot AM$ wyznacz cosinus kąta przy podstawie trójkąta.

Zadanie 4
Wykaż, że jeżeli x, y, z są długościami boków trójkąta to $\frac{\sqrt{3}(x+y+z)}{2} > \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Zadanie 5
Wykaż, że jeżeli kąty wewnętrzne trójkąta spełniają warunek $\sin\alpha = 2\cos\gamma\sin\beta$ to trójkąt ten jest równoramienny.

Zadanie 6
Wykaż, że jeżeli wielomian $W(x) = x^6 + ax^4 + bx^2 + c$ jest podzielny przez trójmian $x^2 + x + 1$, to jest również podzielny przez trójmian $x^2 - x + 1$.

Zadanie 7
Udowodnij, że jeżeli $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ to $(a^3 + b^3)(b^3 + c^3)(c^3 + a^3) = 0$.

Zadanie 8
Uzasadnij, że równanie $x(x+1)(x+2) = y^3$ nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich x, y.